京都医療科学大学
Kyoto College of Medical Science

入試対策講座　数学

２０２２年8月

講師：竹内 充（代々木ゼミナール）

傾向と対策

１．基本的な事項に関する問題が多い

難問が出題されることは少ない．教科書の例題が万遍なく解けるような学力があれば，合格点は確保できるであろう．基本的な定理・公式を自由自在に使いこなすことができるよう訓練しておくことが大切である．

２．多彩な分野からの出題・融合問題が多い

多彩な分野からの問題を凝縮しようという意図が見受けられる．出題範囲をくまなく包括的に学習することが必要である．苦手分野を作ってはならない．

３．計算力の充実が必要である

定型的な問題が多いため，計算ミスを犯すと得点率を大きく下げることになる．本番入試までに計算力を鍛錬しておこう．

過去問研究

【1】

a，b，c は定数で，$a \neq 0$ である．2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$（$-1 \leqq x \leqq 3$） $\cdots$ ① は，$x = 2$ のときに最小となる．また，この区間における最大値は $\dfrac{7}{2}$ であり，最大値と最小値の差は $\dfrac{9}{2}$ である．このとき，$a = \boxed{\text{キ}}$，$b = \boxed{\text{ク}}$，$c = \boxed{\text{ケ}}$ であり，① のグラフと x 軸との交点の x 座標は $x = \boxed{\text{コ}}$ である．

（2022 年度推薦入試・社会人入試基礎学力試験　大問 6 (5)）

《解答例》

$f(x) = ax^2 + bx + c$ とする．

2 次関数 $f(x)$ の，$-1 \leqq x \leqq 3$ における最小値を与える x の値が $x = 2$ であるから，そのグラフは下に凸の放物線である（黒板またはホワイトボードを参照）．よって $f(x) = a(x-2)^2 + d$ $\cdots$ ② ($a > 0$ $\cdots$ ③) と表せて，$-1 \leqq x \leqq 3$ における最大値，最小値はそれぞれ $f(-1) = 9a + d$ $\cdots$ ④，$f(2) = d$ $\cdots$ ⑤ である．

題意から $f(x)$ の最大値は $\dfrac{7}{2}$ であり，これと差が $\dfrac{9}{2}$ である最小値は $\dfrac{7}{2} - \dfrac{9}{2} = -1$ であることがわかる．これらの値と ④，⑤ より，

$$\begin{cases} 9a + d = \dfrac{7}{2} \\ d = -1 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ d = -1 \end{cases} \text{（条件③を満たす）}$$

となる．よって ② から，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1 \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

が得られ，① は $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ $\cdots$ ①$'$ $(-1 \leqq x \leqq 3)$ となる．

よって，$a = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，$b = \boldsymbol{-2}$，$c = \boldsymbol{1}$ である．

また ① のグラフと x 軸との交点の x 座標は，①$'$ で $y = 0$ とすることにより，

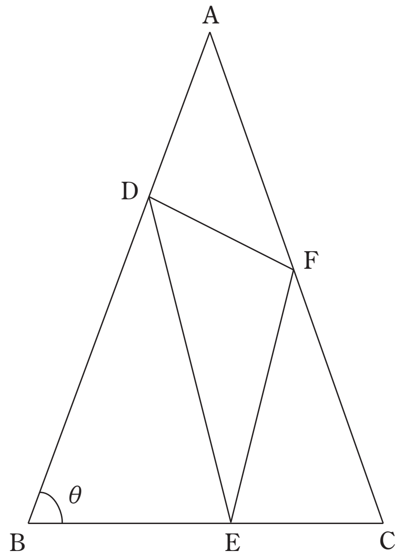
$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \qquad \therefore x = \boldsymbol{2 \pm \sqrt{2}}$$

である．

【２】

次図のような AB=CA$=6$，BC$=4$ の △ABC において，辺 AB を $1:2$ に内分する点を D，BE$=a$ $(0<a<4)$ を満たす辺 BC 上の点を E，辺 CA の中点を F とする．∠DBE$=\theta$ とするとき，次の問いに答えなさい．



(1) $\cos\theta$ の値を求めなさい．

(2) △ABC の面積を求めなさい．

(3) 線分 DE の長さが最小となるときの a の値とそのときの線分 DE の長さを求めなさい．

(4) DE $/\!/$ AC であるときの a の値と △DEF の面積を求めなさい．

（2022 年度総合入試基礎学力試験　大問８）

《考え方》

余弦定理

△ABC において，∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C とし，$a=$BC，$b=$CA，$c=$AB とすると，等式

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A\\
b^2 &= c^2+a^2-2ca\cos B\\
c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos C
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

《解答例》

(1)　A から BC に垂線 AH を下ろす．△ABC は AB=AC の二等辺三角形なので H は BC の中点である．よって BH= $\frac{1}{2}$BC= $\frac{1}{2}\cdot 4 = 2$ であるから，

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}} \\ &= \frac{2}{6} = \mathbf{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

である．

(2)　三平方の定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AH} &= \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BH}^2} \\ &= \sqrt{6^2 - 2^2} \\ &= 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

であるから，△ABC の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH} &= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sqrt{2} \\ &= \mathbf{8\sqrt{2}}\end{aligned}$$

である．

(3)　AB$=6$ かつ D は AB を 1:2 に内分するので BD$=4$ である．△BDE に余弦定理を用いて，

$$\begin{aligned}\mathrm{DE}^2 &= \mathrm{BD}^2 + \mathrm{BE}^2 - 2\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BE}\cos\theta \\ &= 4^2 + a^2 - 2\cdot 4\cdot a\cdot\frac{1}{3} \\ &= a^2 - \frac{8}{3}a + 16 \\ &= \left(a - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{128}{9}\end{aligned}$$

を得る．よって DE の長さの最小を与える a の値は $\mathbf{\frac{4}{3}}$ で，そのときの DE の長さは $\sqrt{\frac{128}{9}} = \mathbf{\frac{8}{3}\sqrt{2}}$ である．

（別解）

(1) の結果から，

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sqrt{1 - \cos^2\theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

である．

DE の長さが最小となるための条件は DE⊥BC $\cdots$ ① である（黒板またはホワイトボードを参照）．よって DE の長さの最小を与える a の値は

$$\begin{aligned} a(=\mathrm{BE}) &= \mathrm{BD}\cos\theta \\ &= 4\cdot\frac{1}{3} = \mathbf{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

で，そのときの DE の長さは

$$\begin{aligned} \mathrm{DE} &= \mathrm{BD}\sin\theta \\ &= 4\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2} = \boldsymbol{\frac{8}{3}\sqrt{2}} \end{aligned}$$

である．

(4)　DE $/\!/$ AC より，BD:DA=BE:EC が成り立つ．よって求める a の値は

$$2:1 = a:4-a$$

$$2(4-a) = 1\cdot a \qquad \therefore a = \mathbf{\frac{8}{3}}$$

となる．

△ABC，△ADF，△BED，△CFE の面積をそれぞれ S，S_{A}，S_{B}，S_{C} とする．

今，AD:DB$=1:2$，BE:EC$=2:1$，CF:FA$=1:1$ であるから，

$$S_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}S = \frac{1}{6}S,\quad S_{\mathrm{B}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}S = \frac{4}{9}S,\quad S_{\mathrm{C}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S = \frac{1}{6}S$$

となる．よって △DEF の面積は，(1) の結果から $S = 8\sqrt{2}$ であることもふまえ，

$$\begin{aligned} S-(S_{\mathrm{A}}+S_{\mathrm{B}}+S_{\mathrm{C}}) &= S-\left(\frac{1}{6}S+\frac{4}{9}S+\frac{1}{6}S\right) \\ &= \frac{2}{9}S \\ &= \frac{2}{9}\cdot 8\sqrt{2} = \boldsymbol{\frac{16}{9}\sqrt{2}} \end{aligned}$$

である．