傾向と対策

１．基本的な事項に関する問題が多い

　難問が出題されることは少ない．教科書の例題が万遍なく解けるような学力があれば，合格点は確保できるであろう．基本的な定理・公式を自由自在に使いこなすことができるよう訓練しておくことが大切である．

２．多彩な分野からの出題・融合問題が多い

　多彩な分野からの問題を凝縮しようという意図が見受けられる．出題範囲をくまなく包括的に学習することが必要である．苦手分野を作ってはならない．

３．計算力の充実が必要である

　定型的な問題が多いため，計算ミスを犯すと得点率を大きく下げることになる．本番入試までに計算力を鍛錬しておこう．

過去問研究

【１】

次の問いに答えなさい．

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解きなさい．

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) 次の式を簡単にしなさい

$$(\log_2 3 + \log_{16} 9)(\log_9 16 + \log_3 4)$$

(3) 次の式の値を求めなさい．

$$10^{-\log_{0.1} 2}$$

（2020 年度一般入学試験前期日程　大問３）

《考え方》

a，b は 1 でない正の数，M，N は正の数，r は実数とすると，以下の等式が成り立つ．

$$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$$
$$\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$$
$$\log_a M^r = r\log_a M$$
$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

《解答例》

(1)　$0 \leqq \theta \leqq 2\pi \;\therefore \frac{\pi}{6} \leqq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$ のとき，$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値の範囲は，

$$\frac{\pi}{6} \leqq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi < \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$$

$$\boldsymbol{\therefore 0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi}$$

である．

(2)　底の変換公式より，

$$\log_{16} 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 16} = \frac{2\log_2 3}{4} = \frac{\log_2 3}{2}$$
$$\log_9 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 9} = \frac{4}{2\log_2 3} = \frac{2}{\log_2 3}$$
$$\log_3 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \frac{2}{\log_2 3}$$

であるから，

$$\begin{aligned}(\log_2 3+\log_{16} 9)(\log_9 16+\log_3 4) &= \left(\log_2 3+\frac{\log_2 3}{2}\right)\left(\frac{2}{\log_2 3}+\frac{2}{\log_2 3}\right)\\ &= \frac{3}{2}\log_2 3\times\frac{4}{\log_2 3}\\ &= \mathbf{6}\end{aligned}$$

である．

(3)　与式の値を x とおくと，

$$x=10^{-\log_{0.1} 2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \log_{0.1} x &= \log_{0.1} 10^{-\log_{0.1} 2}\\ &= -\log_{0.1} 2\cdot\log_{0.1} 10\\ &= \log_{0.1} 2\end{aligned}$$

であるから $x=2$．よって与式の値は $\mathbf{2}$ である．

【２】

m は定数とする．直線 $y = mx - 3$ と円 $2x^2 + 2y^2 - 8x + 7 = 0$ の共有点の個数と，そのときの m の値の範囲を求めなさい．

（2020 年度一般入試後期日程　大問２）

《考え方》

点と直線の距離

直線 $ax + by + c = 0$ と点 $(x_0,\ y_0)$ との距離 d は，

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

で与えられる．

《解答例》

$2x^2 + 2y^2 - 8x + 7 = 0$ を変形して，

$$x^2 + y^2 - 4x + \frac{7}{2} = 0 \qquad \therefore (x-2)^2 + y^2 = \frac{1}{2} \ \cdots ①$$

を得る．よって ① で表される円は，点 $(2,\ 0)$ を中心とする半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円である．

題意の直線と ① の中心 $(2,\ 0)$ との距離を d とすると，

$$\begin{aligned} d &= \frac{|m \cdot 2 - 0 - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{|2m - 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} \end{aligned}$$

であり，$d > \frac{1}{\sqrt{2}}$，$d = \frac{1}{\sqrt{2}}$，$d < \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，題意の 2 つのグラフの共有点の個数はそれぞれ 0，1，2 となる．

さらに，

$$\begin{aligned} d > \frac{1}{\sqrt{2}} &\iff \frac{|2m-3|}{\sqrt{m^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\iff \frac{(2m-3)^2}{m^2+1} > \frac{1}{2} \\ &\iff 2(2m-3)^2 > m^2 + 1 \\ &\iff 7m^2 - 24m + 17 > 0 \\ &\iff (m-1)(7m-17) > 0 \\ &\iff m < 1,\ \frac{17}{7} < m \end{aligned}$$

であり，同様に

$$d=\frac{1}{\sqrt{2}}\iff m=1,\ \frac{17}{7}$$
$$d<\frac{1}{\sqrt{2}}\iff 1<m<\frac{17}{7}$$

であるから，求める個数は，

$$\boldsymbol{\begin{cases} 0 & \left(m<1,\ \dfrac{17}{7}<m\,\text{のとき}\right) \\ 1 & \left(m=1,\ \dfrac{17}{7}\text{のとき}\right) \\ 2 & \left(1<m<\dfrac{17}{7}\text{のとき}\right) \end{cases}}$$

となる．